Thermodynamique et mécanique des fluides – Chapitre 7

Énergétique des fluides en écoulement stationnaire

I. Relation de Bernoulli 1
I.1. Définition du système fermé 1
I.2. Bilan d'énergie mécanique 2
I.3. Application à la vidange d'un réservoir 2
II. Prise en compte d'un élément actif 3
II.1. Définitions 3
II.2. Bilan d'énergie mécanique 3
III. Pertes de charge 4
III.1. Définition 4
III.2. Perte de charge régulière 4
III.3. Perte de charge singulière 5
III.4. Mise en évidence expérimentale 5

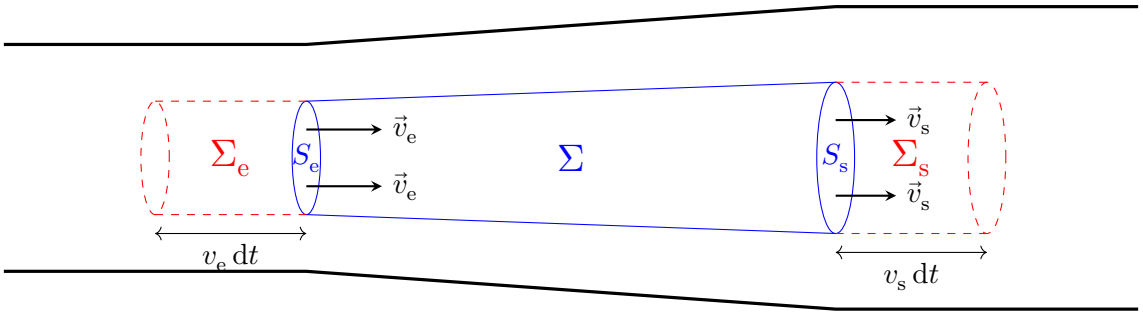
On se restreint dans ce chapitre à l'étude des circuits hydrauliques et pneumatiques, pour lesquels les transferts thermiques sont négligeables.

I. Relation de Bernoulli

I.1. Définition du système fermé

On souhaite appliquer le théorème de l'énergie mécanique à une portion de fluide parfait de masse volumique ρ en écoulement stationnaire et incompressible dans une conduite.

On définit le système Σ, appelé volume de contrôle, constitué des particules de fluide contenues dans un tube de courant entre la surface S_e et la surface S_s. Le système Σ est un système ouvert puisque des particules de fluide entrent et sortent à chaque instant. Il n'est alors pas possible d'appliquer les théorèmes énergétiques vu précédemment en mécanique, car ceux-ci ne s'appliquent qu'à des systèmes fermés.



On définit ainsi :

- le système Σ_e de volume $dV_e = S_e\,v_e\,dt$ et de masse $dm_e = \rho\,dV_e$ constitué des particules de fluide qui entrent dans le système Σ entre les instants t et $t + dt$;
- le système Σ_s de volume $dV_s = S_s\,v_s\,dt$ et de masse $dm_s = \rho\,dV_s$ constitué des particules de fluide qui sortent du système Σ entre les instants t et $t + dt$;
- le système Σ' tel que : $\begin{cases} \Sigma'(t) = \Sigma_e + \Sigma \\ \Sigma'(t + dt) = \Sigma + \Sigma_s \end{cases}$.

Le système Σ' est un système fermé, puisqu'il est constitué des mêmes particules de fluide entre les instants t et $t + dt$.

La conservation du débit volumique le long du tube de courant pour cet écoulement stationnaire et incompressible donne :

$$D_V = v_e\,S_e = v_s\,S_s$$

d'où on peut exprimer les volumes élémentaires :

$$\mathrm{d}V_\mathrm{e} = \mathrm{d}V_\mathrm{s} = D_\mathrm{V}\,\mathrm{d}t.$$

I.2. Bilan d'énergie mécanique

En l'absence d'échange thermique, l'application du théorème de l'énergie mécanique au système fermé Σ' pour un fluide parfait en écoulement stationnaire et incompressible entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$ donne :

$$\mathrm{d}E_\mathrm{m} = \delta W_\mathrm{P} = \delta W_\mathrm{P,e} + \delta W_\mathrm{P,s}$$

avec :

- la variation d'énergie mécanique $\mathrm{d}E_\mathrm{m} = E_\mathrm{m}(t+\mathrm{d}t) - E_\mathrm{m}(t) = \left[E_{\mathrm{m},\Sigma} + E_{\mathrm{m},\Sigma_\mathrm{s}}\right] - \left[E_{\mathrm{m},\Sigma_\mathrm{e}} + E_{\mathrm{m},\Sigma}\right]$, où on peut exprimer $E_{\mathrm{m},\Sigma_\mathrm{e}} = E_{\mathrm{c},\Sigma_\mathrm{e}} + E_{\mathrm{pp},\Sigma_\mathrm{e}} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}m_\mathrm{e}\,v_\mathrm{e}^2 + \mathrm{d}m_\mathrm{e}\,g\,z_\mathrm{e} = \dfrac{1}{2}\,\rho\,D_\mathrm{V}\,\mathrm{d}t\,v_\mathrm{e}^2 + \rho\,D_\mathrm{V}\,\mathrm{d}t\,g\,z_\mathrm{e}$ et de façon équivalente $E_{\mathrm{m},\Sigma_\mathrm{s}} = \dfrac{1}{2}\,\rho\,D_\mathrm{V}\,\mathrm{d}t\,v_\mathrm{s}^2 + \rho\,D_\mathrm{V}\,\mathrm{d}t\,g\,z_\mathrm{s}$;
- le travail des forces de **pression d'admission** qui s'exercent sur la surface S_e et tendent à faire entrer le fluide dans le système Σ, il s'exprime $\delta W_\mathrm{P,e} = P_\mathrm{e}\,\mathrm{d}V_\mathrm{e} = P_\mathrm{e}\,D_\mathrm{V}\,\mathrm{d}t > 0$;
- le travail des forces de **pression de refoulement** qui s'exercent sur la surface S_s et s'opposent à la sortie du fluide contenu dans le système Σ, il s'exprime $\delta W_\mathrm{P,s} = -P_\mathrm{s}\,\mathrm{d}V_\mathrm{s} = -P_\mathrm{s}\,D_\mathrm{V}\,\mathrm{d}t < 0$.

On obtient :

$$\frac{1}{2}\,\rho\,D_\mathrm{V}\,\mathrm{d}t\,v_\mathrm{s}^2 + \rho\,D_\mathrm{V}\,\mathrm{d}t\,g\,z_\mathrm{s} - \frac{1}{2}\,\rho\,D_\mathrm{V}\,\mathrm{d}t\,v_\mathrm{e}^2 - \rho\,D_\mathrm{V}\,\mathrm{d}t\,g\,z_\mathrm{e} = P_\mathrm{e}\,D_\mathrm{V}\,\mathrm{d}t - P_\mathrm{s}\,D_\mathrm{V}\,\mathrm{d}t$$

d'où en simplifiant :

$$P_\mathrm{e} + \frac{1}{2}\,\rho\,v_\mathrm{e}^2 + \rho\,g\,z_\mathrm{e} = P_\mathrm{s} + \frac{1}{2}\,\rho\,v_\mathrm{s}^2 + \rho\,g\,z_\mathrm{s}.$$

Comme cette relation est valable quel que soit le tube de courant étudié, on peut la généraliser entre deux points quelconques A et B le **long d'une ligne de courant** pour un fluide **parfait** en écoulement **stationnaire** et **incompressible**, et on obtient la **relation de Bernoulli** :

$$\boxed{P_A + \frac{1}{2}\,\rho\,v_A^2 + \rho\,g\,z_A = P_B + \frac{1}{2}\,\rho\,v_B^2 + \rho\,g\,z_B}.$$

La quantité qui intervient dans la relation de Bernoulli est appelée **charge hydraulique** et notée :

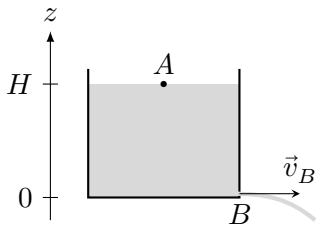
$$\boxed{K = P + \frac{1}{2}\,\rho\,v^2 + \rho\,g\,z}$$

elle est homogène à une pression.

I.3. Application à la vidange d'un réservoir

Application :

> On considère la vidange d'un réservoir de section S_0 rempli d'eau sur une hauteur H. Il se vide à travers un trou de section s à sa base, tel que $s \ll S_0$. On suppose que l'eau est un fluide parfait qui s'écoule en régime stationnaire et incompressible. On note A un point à la surface du réservoir et B un point au niveau du trou.
> Exprimons la vitesse d'écoulement v_B de l'eau.



On applique la relation de Bernoulli entre les points A et B le long d'une ligne de courant : $P_A + \frac{1}{2}\rho\, v_A^2 + \rho\, g\, z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho\, v_B^2 + \rho\, g\, z_B$, avec :

- $P_A = P_B = P_{\text{atm}}$ car ces deux points sont en contact avec l'air à la pression atmosphérique ;
- $z_A = H$;
- $z_B = 0$;
- v_A négligeable car la conservation du débit volumique donne : $D_{\text{V}} = v_A\, S_0 = v_B\, s$, avec $s \ll S_0$, d'où : $v_A \ll v_B$.

On obtient : $\rho\, g\, H = \frac{1}{2}\rho\, v_B^2$, d'où : $v_B = \sqrt{2\, g\, H}$, il s'agit de la formule de Torricelli.

II. Prise en compte d'un élément actif

II.1. Définitions

Un **élément actif** est un composant qui échange de l'énergie mécanique avec un fluide en écoulement. Il peut s'agir par exemple d'une pompe, d'une turbine...

Un élément actif est caractérisé par la présence de **parties mobiles** dans un circuit hydraulique ou pneumatique, qui vont permettre d'apporter ou de retirer de l'énergie mécanique au fluide.

On appelle **travail indiqué massique** w_{i} le travail massique de l'élément actif, c'est-à-dire le travail apporté par unité de masse de fluide, il s'exprime en $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$.

La **puissance indiquée** fournie par l'élément actif à un écoulement présentant un débit massique D_{m} est alors :

$$\boxed{\Phi_{\text{i}} = D_{\text{m}}\, w_{\text{i}}}$$

elle s'exprime en W.

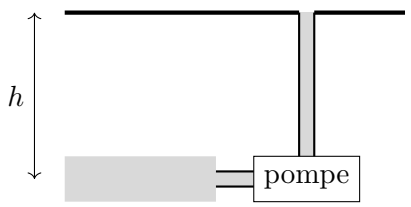
II.2. Bilan d'énergie mécanique

La présence de l'élément actif ajoute un travail $\delta W_{\text{i}} = \Phi_{\text{i}}\, \text{d}t = \rho\, D_{\text{V}}\, w_{\text{i}}\, \text{d}t$ au théorème de l'énergie mécanique précédent. On aboutit alors à la **relation de Bernoulli entre l'entrée et la sortie d'un élément actif** :

$$\boxed{P_{\text{e}} + \frac{1}{2}\rho\, v_{\text{e}}^2 + \rho\, g\, z_{\text{e}} + \rho\, w_{\text{i}} = P_{\text{s}} + \frac{1}{2}\rho\, v_{\text{s}}^2 + \rho\, g\, z_{\text{s}}}.$$

Application :

On considère une pompe enterrée permettant de faire remonter avec un débit volumique $D_{\text{V}} = 10\,\text{L}\cdot\text{s}^{-1}$ de l'eau qui se trouve à la pression $P_{\text{n}} = 1{,}5\,\text{bar}$ dans une nappe phréatique à une profondeur $h = 10\,\text{m}$ jusqu'à la surface où règne la pression atmosphérique. On suppose que l'eau est un fluide parfait en écoulement stationnaire et incompressible dans la conduite de section constante.
Déterminons la puissance indiquée fournie par la pompe.



On applique la relation de Bernoulli entre l'entrée de la pompe dans la nappe phréatique et la sortie de la pompe à la surface :

$P_\text{n} + \frac{1}{2}\rho\, v_\text{e}^2 + \rho\, g\, z_\text{e} + \rho\, w_\text{i} = P_\text{atm} + \frac{1}{2}\rho\, v_\text{s}^2 + \rho\, g\, z_\text{s}$, avec $v_\text{e} = v_\text{s}$ par conservation du débit volumique dans cette conduite de section constante et $z_\text{s} = z_\text{e} + h$, d'où : $\rho\, w_\text{i} = P_\text{atm} - P_\text{n} + \rho\, g\, h$.
La puissance indiquée est alors : $\Phi_\text{i} = \rho\, D_\text{V}\, w_\text{i} = D_\text{V}\,(P_\text{atm} - P_\text{n} + \rho\, g\, h) = 1{,}5\,\text{kW}$.

III. Pertes de charge

III.1. Définition

En pratique, on ne peut pas toujours considérer qu'un fluide en écoulement dans une conduite est parfait, car la dissipation de son énergie mécanique due à sa viscosité n'est pas forcément négligeable. La charge hydraulique du fluide diminue alors le long de l'écoulement, et la relation de Bernoulli n'est plus vérifiée entre l'entrée et la sortie d'une conduite puisque :

$$P_\text{s} + \frac{1}{2}\rho\, v_\text{s}^2 + \rho\, g\, z_\text{s} < P_\text{e} + \frac{1}{2}\rho\, v_\text{e}^2 + \rho\, g\, z_\text{e}.$$

On définit la **perte de charge** ΔP^* du fluide dans la conduite telle que :

$$\Delta P^* = \left(P_\text{e} + \frac{1}{2}\rho\, v_\text{e}^2 + \rho\, g\, z_\text{e}\right) - \left(P_\text{s} + \frac{1}{2}\rho\, v_\text{s}^2 + \rho\, g\, z_\text{s}\right)$$

elle est positive par définition, et s'exprime en Pa.

On obtient alors la **relation de Bernoulli avec prise en compte des pertes de charge** :

$$P_\text{e} + \frac{1}{2}\rho\, v_\text{e}^2 + \rho\, g\, z_\text{e} = P_\text{s} + \frac{1}{2}\rho\, v_\text{s}^2 + \rho\, g\, z_\text{s} + \Delta P^*.$$

III.2. Perte de charge régulière

Une **perte de charge régulière** est une perte de charge répartie de façon uniforme le long d'un écoulement dans une conduite.

Ces pertes dépendent de la nature du fluide, de la géométrie de la conduite, ou encore des propriétés de l'écoulement.

Application :

On considère un écoulement d'eau stationnaire à la température $T = 20°\text{C}$ dans une conduite cylindrique de longueur $L = 10\,\text{m}$ et de diamètre $d = 32\,\text{mm}$ avec un débit volumique $D_\text{V} = 5{,}0\,\text{m}^3\cdot\text{h}^{-1}$.
Déterminons la perte de charge dans cet écoulement à l'aide de la formule de Blasius :

$$\Delta P^* = 0{,}316\, Re^{-0{,}25}\, \frac{L\,\rho\, v^2}{2\,d}$$

avec $Re = \frac{v\,d\,\rho}{\eta}$ le nombre de Reynolds.

On obtient : $\Delta P^* = 0{,}316\left(\frac{v\,d\,\rho}{\eta}\right)^{-0{,}25}\frac{L\,\rho\, v^2}{2\,d}$, avec $\eta = 1{,}0.10^{-3}\,\text{Pa}\cdot\text{s}$ et $v = \frac{D_\text{V}}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 1{,}7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, d'où : $\Delta P^* = 9{,}6.10^3\,\text{Pa}$.

III.3. Perte de charge singulière

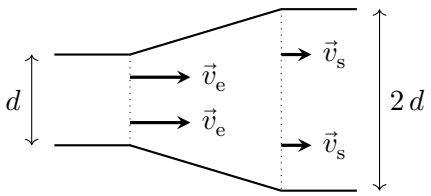
Une **perte de charge singulière** est une perte de charge localisée en un endroit particulier d'un écoulement dans une conduite.

Ces pertes peuvent apparaitre à cause de la présence d'un coude, d'un élargissement, ou encore d'un obstacle dans l'écoulement.

Application :

On considère un écoulement stationnaire et incompressible d'eau dans une conduite à symétrie cylindrique horizontale dont le diamètre double brusquement au niveau d'un élargissement. On suppose que la variation de pression entre l'entrée et la sortie de l'élargissement est donnée par le théorème de Bélanger :

$$P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s} = \rho\, v_\mathrm{s}\,(v_\mathrm{s} - v_\mathrm{e})\,.$$



Sachant que la vitesse avant l'élargissement est $v_\mathrm{e} = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, déterminons la perte de charge due à cet élargissement.

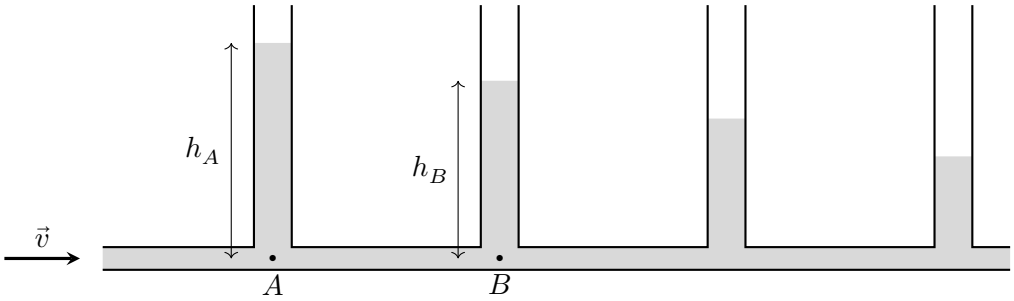
La perte de charge s'exprime : $\Delta P^* = \left(P_\mathrm{e} + \frac{1}{2}\rho\, v_\mathrm{e}^2 + \rho\, g\, z_\mathrm{e}\right) - \left(P_\mathrm{s} + \frac{1}{2}\rho\, v_\mathrm{s}^2 + \rho\, g\, z_\mathrm{s}\right)$, avec $z_\mathrm{e} = z_\mathrm{s}$ pour une conduite horizontale, soit : $\Delta P^* = \rho\, v_\mathrm{s}\,(v_\mathrm{s} - v_\mathrm{e}) + \frac{1}{2}\rho\,(v_\mathrm{e}^2 - v_\mathrm{s}^2)$.

La conservation du débit volumique donne : $D_\mathrm{V} = v_\mathrm{e}\,\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = v_\mathrm{s}\,\pi\left(\frac{2\,d}{2}\right)^2$, d'où : $v_\mathrm{s} = \frac{v_\mathrm{e}}{4}$.

On obtient : $\Delta P^* = \rho\,\frac{v_\mathrm{e}}{4}\left(\frac{v_\mathrm{e}}{4} - v_\mathrm{e}\right) + \frac{1}{2}\rho\left(v_\mathrm{e}^2 - \frac{v_\mathrm{e}^2}{16}\right) = \frac{9}{32}\rho\, v_\mathrm{e}^2 = 1{,}1.10^3\,\mathrm{Pa}$.

III.4. Mise en évidence expérimentale

Pour mettre en évidence visuellement les pertes de charge, on étudie le dispositif ci-dessous, constitué d'un écoulement stationnaire et incompressible d'eau dans une conduite horizontale de petit diamètre présentant des tubes verticaux ouverts à leurs sommets.



On observe expérimentalement que l'eau monte dans les tubes verticaux, mais avec une hauteur de plus en plus faible le long de la conduite.

En supposant que le fluide est statique dans les tubes verticaux, on peut exprimer les pressions aux points A et B à l'aide de la relation de la statique des fluides :

- $P_A = P_\mathrm{atm} + \rho\, g\, h_A$;
- $P_B = P_\mathrm{atm} + \rho\, g\, h_B$.

La perte de charge entre ces deux points est :

$$\Delta P^* = \left(P_A + \frac{1}{2}\rho\, v_A^2 + \rho\, g\, z_A\right) - \left(P_B + \frac{1}{2}\rho\, v_B^2 + \rho\, g\, z_B\right) = P_A - P_B$$

comme $z_A = z_B$ pour une conduite horizontale et $v_A = v_B = v$ par conservation du débit volumique, d'où :

$$\Delta P^* = \rho\, g\, (h_A - h_B)\,.$$

La mesure de la différence de hauteur d'eau entre les deux tubes permet donc de remonter à la perte de charge entre ces deux points.

On remarque qu'il est alors possible d'exprimer une **perte de charge en terme de hauteur** Δh^* telle que :

$$\Delta h^* = \frac{\Delta P^*}{\rho\, g}.$$